



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

---

ФАКУЛЬТЕТ «Специальное машиностроение»

КАФЕДРА «Колесные машины»

Отчёт о выполнении лабораторной работы №1  
по курсу  
«Динамика транспортных средств»  
на тему  
«Одномассовая математическая модель колебаний четверти  
автомобиля»

Студент СМ10-71

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

В.Б. Сухоносенко

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

П.В. Зыбин

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

2025 г.

# Содержание

1	Исходные данные . . . . .	1
2	Основная часть . . . . .	2
2.1	Математическое описание системы . . . . .	2
2.2	Проверка модели . . . . .	4
2.3	Свободные колебания . . . . .	5
2.4	Затухающие колебания . . . . .	5
2.5	Вынужденные колебания (синусоидальный профиль дороги) .	6
2.6	Амплитудно-частотная характеристика . . . . .	8
	Вывод . . . . .	9
	Скрипт MATLAB для модели Simulink . . . . .	10

# 1 Исходные данные

Задачей лабораторной работы является моделирование движения колеса при различных режимах качения: свободном, нейтральном

1. Связь колёс с дорожным полотном удерживающая;
2. Упругостью и демпфированием колеса пренебречь – модель выполнить одномассовой;
3. Колебания считать малыми, исключительно вертикальными;
4. Нелинейностями подвески и амортизаторов пренебречь;
5. Упрощённая схема построена на рис.1

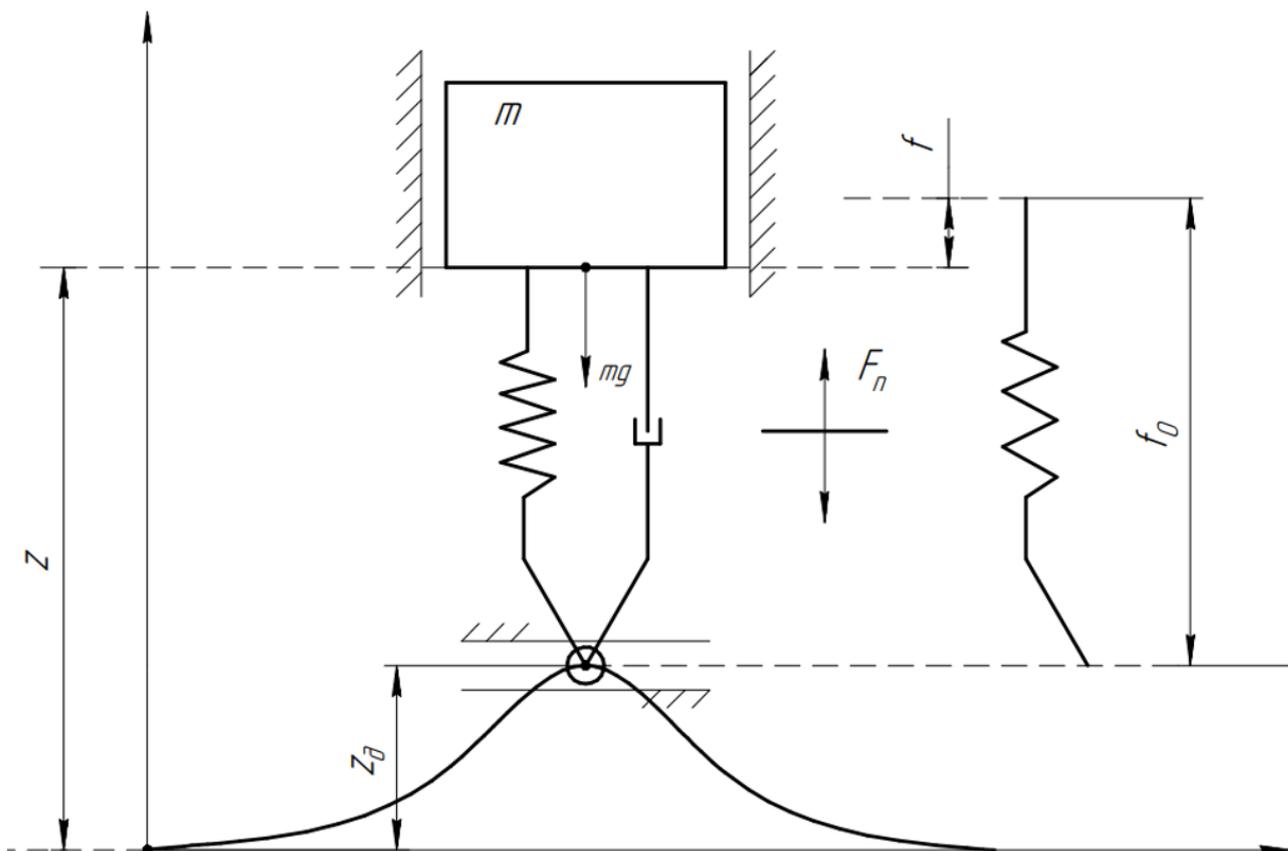


Рисунок 1.1 — Упрощенная схема

- Составлено дифференциальное уравнений - Основные параметры введены в MATLAB - Построены Амплитудно-частотные характеристики, фазово-частотные, Амплитудно-фазовая частотная характеристика

## 2 Основная часть

### 2.1 Математическое описание системы

Данная система имеет одну степень свободы и описывается одним дифференциальным уравнением. На тело действует сила тяжести  $-mg$ , сила упругости пружины  $F_{\text{упр}} = c(f_0 + z_{\text{дор}} - z)$ , демпфирующая сила со стороны амортизатора  $F_{\text{демпф}} = b(\dot{z}_{\text{дор}} - \dot{z})$ . Преобразовав второй закон Ньютона для данной системы, получим выражение для вертикального ускорения центра масс автомобиля - уравнение (2.1)

$$\ddot{z} = \frac{1}{m}[-mg + c(f_0 + z_{\text{дор}} - z) + b(\dot{z}_{\text{дор}} - \dot{z})] \quad (2.1)$$

где  $m$  – масса автомобиля,  $g$  – ускорение свободного падения,  $c$  – жёсткость пружины,  $b$  – коэффициент демпфирования амортизатора,  $z_{\text{дор}}, z$  – высота дороги и центра масс автомобиля соответственно,  $f_0 = z_0 - (mg/c)$  – длина пружины в состоянии равновесия под действием на неё массы автомобиля.

Профиль дороги считался синусоидальным, а скорость автомобиля – постоянной. Отсюда функция высоты дороги от времени задавалась уравнением (2.2)

$$z_{\text{дор}} = \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{A} \cdot vt\right) \quad (2.2)$$

Где  $A$  – длина базового участка дороги (длина периода),  $H$  – амплитуда профиля (см. рис. 2.1).

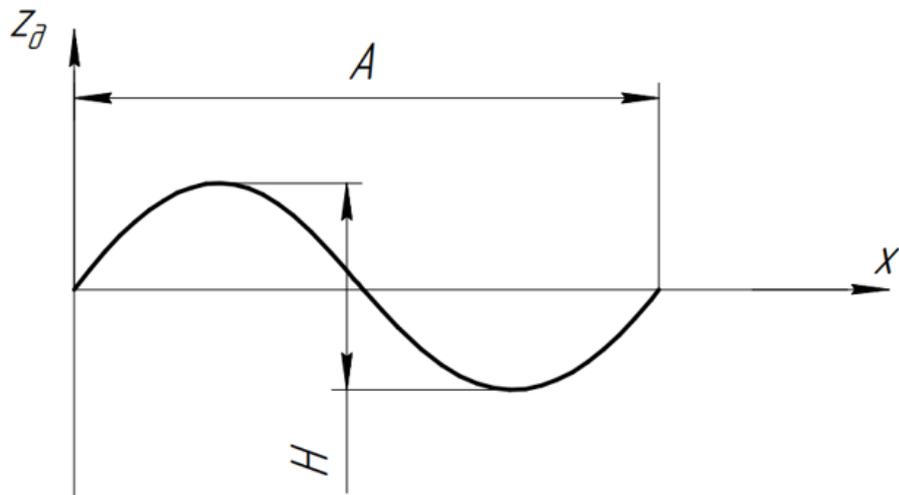


Рисунок 2.1 – Синусоидальный профиль дороги и его параметры

В среде Matlab написан код (см. приложение), в котором были вычислены и заданы параметры системы, произведена обработка результатов Simulink.

В Simulink составлена блок-схема (рис. 2.2), соответствующая выведенному дифференциальному уравнению.

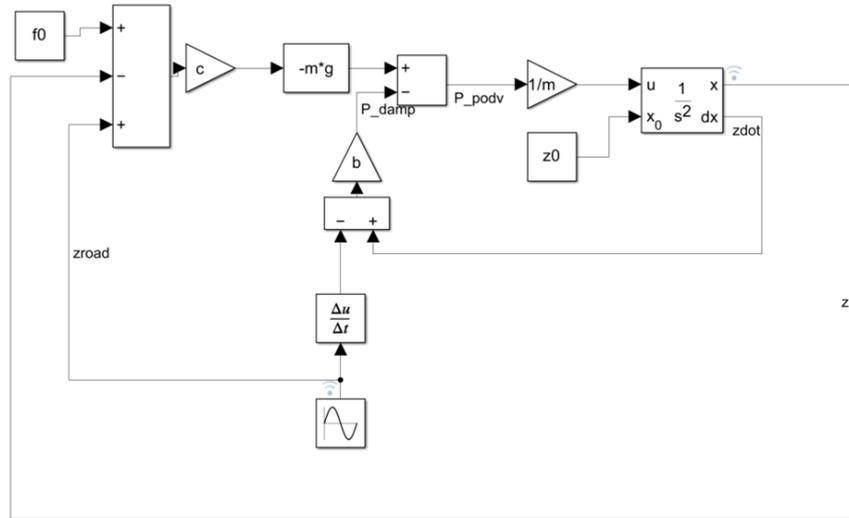


Рисунок 2.2 — Блок-схема Simulink, соответствующая дифференциальному уравнению

## 2.2 Проверка модели

Проверка правильности составленной модели произведена подстановкой в Simulink начальных условий, соответствующих равновесному положению центра масс при покое.

Положим  $z_{\text{дор}}(t) \equiv 0, \dot{z}(0) = 0, \ddot{z}(0) = 0$ . Тогда из (2.1) получим (2.3)

$$z_0 = f_0 - \frac{mg}{c} \quad (2.3)$$

Где  $z_0$  есть положение автомобиля. В интегратор (см. 2.2) зададим начальные значения  $z = z_0, \dot{z} = 0$  и посмотрим на результат:

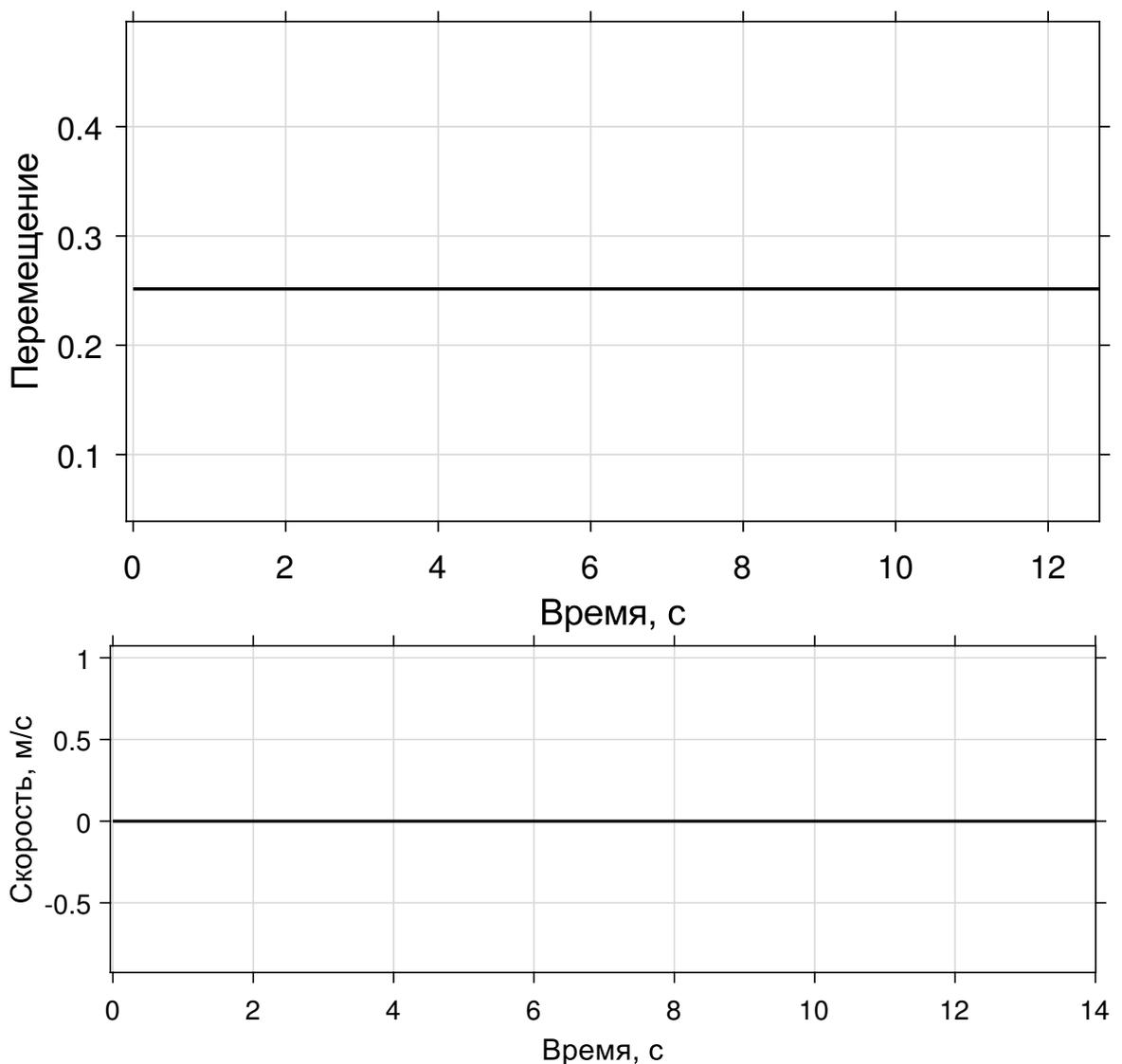


Рисунок 2.3 — Перемещение и скорость при статическом равновесии

Как видно из рис. 2.3, модель соответствует уравнению 2.1 при равновесном положении автомобиля.

### 2.3 Свободные колебания

Примем  $b = 0, z_{\text{дор}} \equiv 0$ , получим свободные колебания, описываемые уравнением 2.4 (выполним замену  $-mg + cf = z_0$ )

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}z = \frac{c}{m}z_0 \quad \xRightarrow{\hat{z}=z+cz_0/m} \quad \ddot{\hat{z}} + \frac{c}{m}\hat{z} = 0 \quad (2.4)$$

Зададим начальные условия  $z = 0.1$  м,  $\dot{z} = 0$ . Получим следующие графики перемещения и скорости:

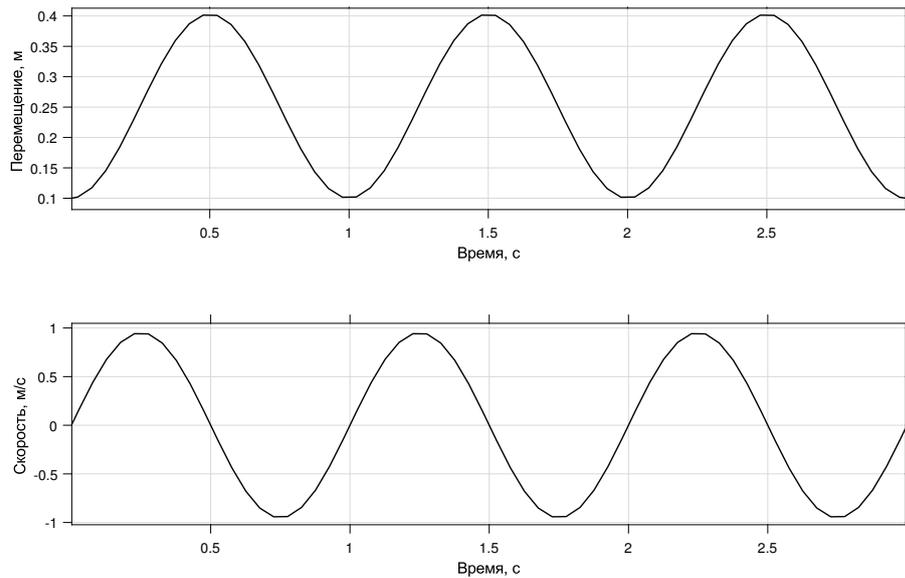


Рисунок 2.4 — Свободные незатухающие колебания при отклонении от равновесия

Из теории малых колебаний аналитически можно вычислить собственную частоту  $\omega_0 = \sqrt{c/m}$  и период колебаний  $T = 2 * \pi / \omega_0$ . По графикам 2.4 видно, что период колебаний равен 1 с, что соответствует теории (значения  $m, c$  были изначально подобраны под этот период).

### 2.4 Затухающие колебания

Введём демпфирование. Критический коэффициент демпфирования  $b_{\text{крит}} = 2\sqrt{cm} = 1885 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}$ . На графике рис. 2.5 представлены затухающие колебания при различных коэффициентах демпфирования,  $z(0) = 1, \dot{z}(0) = 0$ . Видно, что  $b = b_{\text{крит}}$  является значением, разделяющее затухающие колебания и апериодическое движение.

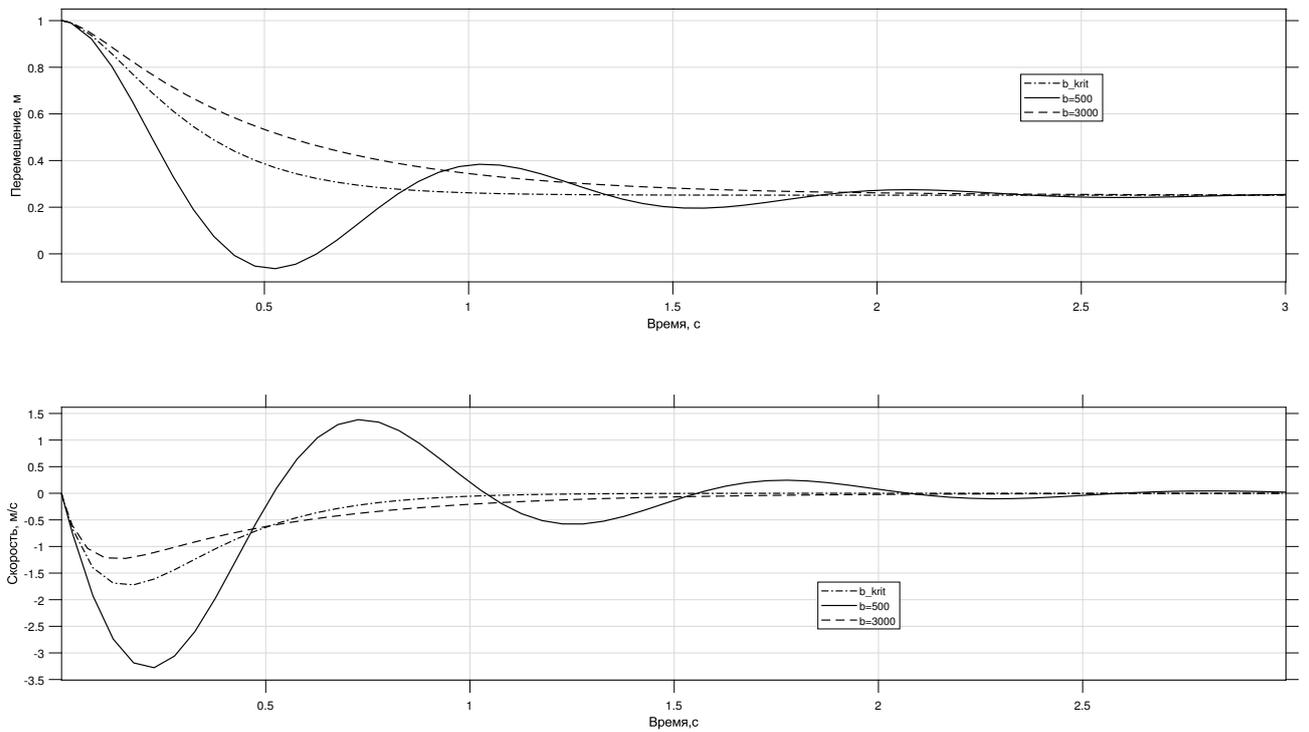


Рисунок 2.5 — Свободные незатухающие колебания при отклонении от равновесия

## 2.5 Вынужденные колебания (синусоидальный профиль дороги)

Изменяющаяся по синусоидальному закону опорная поверхность  $z_{\text{дор}}$  является гармоническим кинематическим возбуждением системы. Примем  $z(0) = z_0, \dot{z}(0) = 0, A = 1, H = 1, v = 1$ .

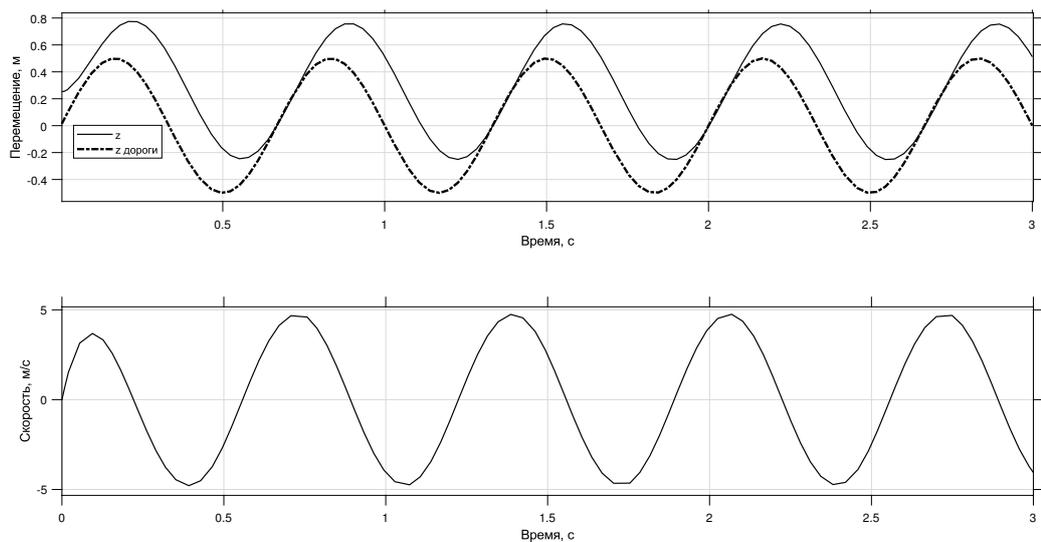


Рисунок 2.6 — Вынужденные колебания

При  $b = 0$  энергия от возбуждения подводится в систему и не рассеивается, из-за чего наблюдается бесконечное нарастание амплитуды - см. рис. 2.7

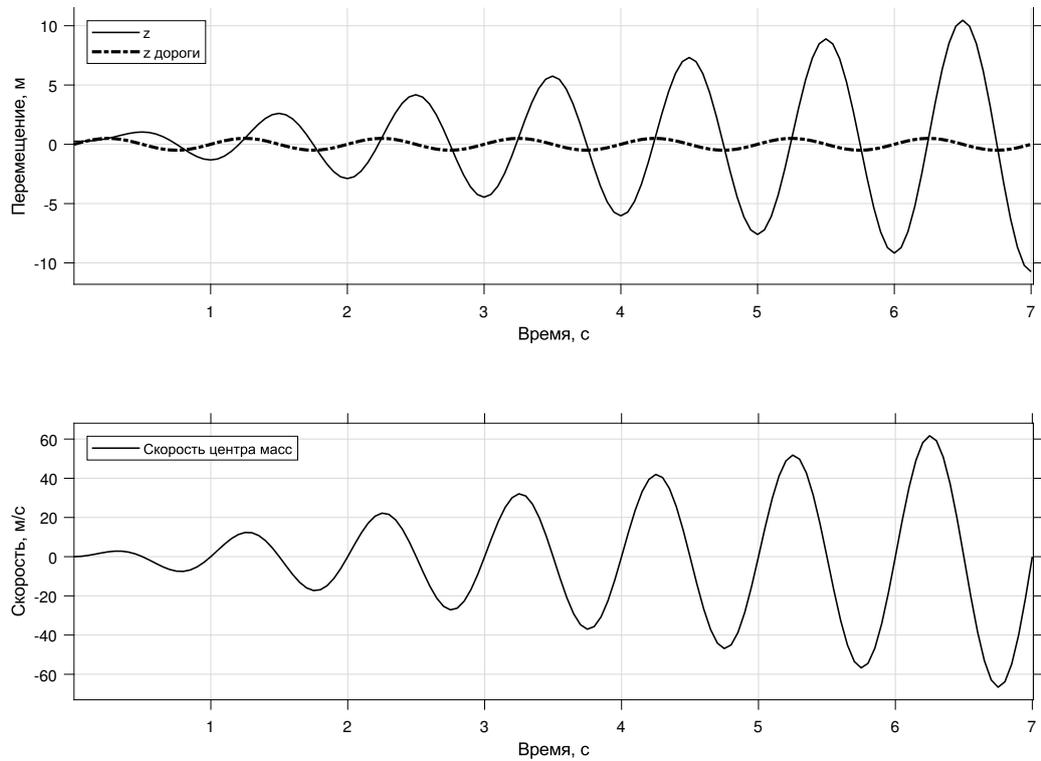


Рисунок 2.7 — Явление резонанса

## 2.6 Амплитудно-частотная характеристика

Амплитудно-частотная характеристика была построена для трёх различных значений  $b_1 = 800; b_2 = 1200; b_3 = 2200$ . Симуляция запускалась с начальными условиями  $z(0) = z_0, \dot{z}(0) = 0$ , а скорость менялась в соответствии с набором точек (код на рис. ??)

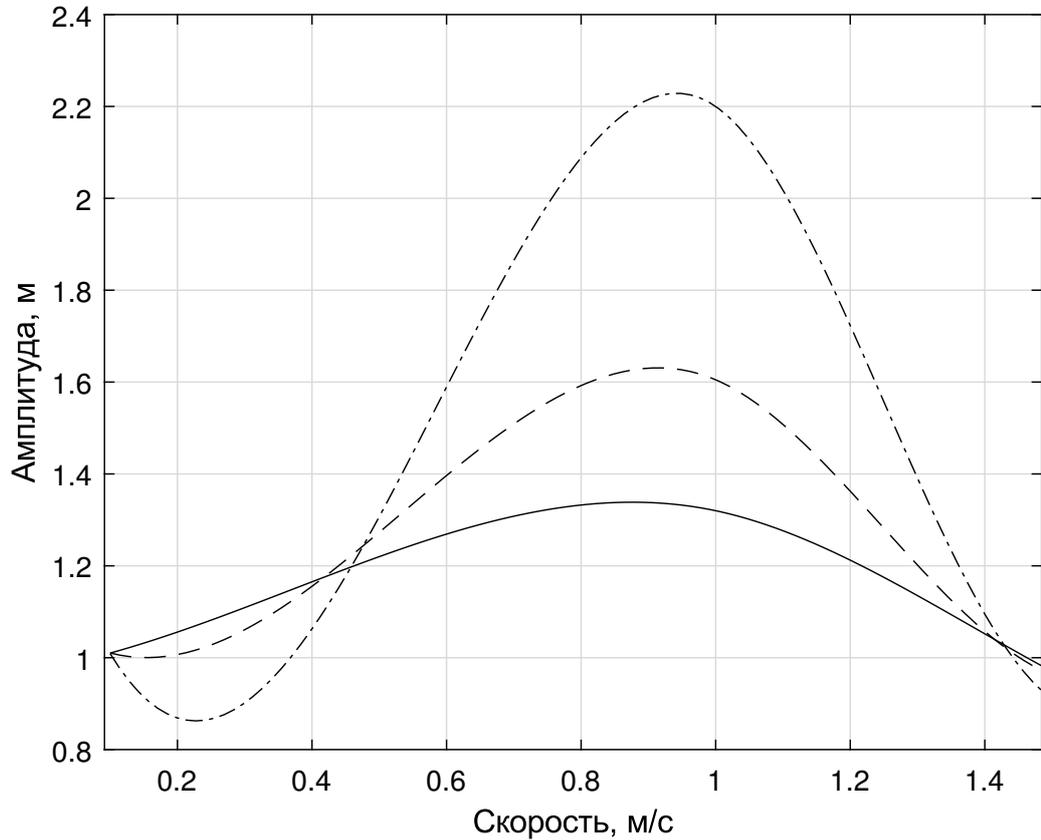


Рисунок 2.8 — АЧХ системы

В левой части график не физичен в силу малого числа точек, которого недостаточно для корректного приближения характеристики с помощью сплайна. В тот же момент был получен качественный результат пересечения АЧХ для различных  $b$  при скорости, соответствующей частоте  $\omega_0\sqrt{2} = 8.89$  рад/с (в тот же момент  $v * 2\pi/A \approx 8.9$  рад/с)

## Вывод

В ходе лабораторной работы была построена математическая модель одномассовой системы, описывающей поведение четверти массы автомобиля при движении по синусоидальному профилю дороги. Исследовано поведение системы при различных условиях - движение по ровной дороге, отсутствие демпфирующего элемента, резонанс и установившиеся вынужденные колебания при движении по периодическому дорожному профилю. Построена Амплитудно-частотная характеристика системы.

## Скрипт MATLAB для модели Simulink

```
m = 150;
g = 9.81;
T=1
c = 4*pi^2*m/(T^2);
fst = m*g/c ;
f0=0.5
z0=f0-fst;
t=linspace(1,10)';
froad = t.*0;
b=800;
bkrit=2*sqrt(c*m);
roadamp=1;
A=1;
v_achh1=[0.1*A/T 0.5*A/T A/T sqrt(2)*A/T 1.5*A/T];
Amp_achh1=[0.7566+0.2537 0.889+0.384 1.054+0.551
 0.77+0.27 0.747+0.215]
Amp_achh2=[0.756+0.253 0.90+0.407 1.35+0.85
 0.78+0.28 0.71+0.2]
Amp_achh3=[0.76+0.25 0.86+0.36 0.91+0.41
 0.77+0.27 0.74+0.23]
x_1=linspace(min(v_achh1),max(v_achh1))
a_1=interp1(v_achh1,Amp_achh1,x_1,'spline')
a_2=interp1(v_achh1,Amp_achh2,x_1,'spline')
a_3=interp1(v_achh1,Amp_achh3,x_1,'spline')
plot(x_1,a_1,'b--')
hold on
plot(x_1,a_2,'b-.')
plot(x_1,a_3,'b')
%Подписать оси
xlabel('Скорость, м/с');
ylabel('Амплитуда, м');
```