



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

---

ФАКУЛЬТЕТ «Специальное машиностроение»

КАФЕДРА «Колесные машины»

Отчёт о выполнении лабораторной работы №5

по курсу

«Управление техническими системами»

на тему

«Система управления положением перевернутого маятника с

ПИД-регулятором»

Студент СМ10-81

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

В.Б. Сухоносенко

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

Преподаватель

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

А.А. Смирнов

\_\_\_\_\_  
(Ф.И.О.)

2025 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1 Выполнение работы . . . . .	4
1.1 Математическая модель . . . . .	4
1.2 Анализ передаточной функции . . . . .	5
1.3 Использование метода пространства состояний . . . . .	5
1.4 Синтез ПИД-регулятора . . . . .	8
1.5 Нелинейная модель . . . . .	11
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	16

## ВВЕДЕНИЕ

Задачей лабораторной работы №5 являлось:

1. Изучение математической модели перевёрнутого маятника,
2. Линеаризация модели в пространстве состояний,
3. Получение реакции системы на импульсное воздействие и анализ полученных моделей,
4. Синтез MATLAB ПИД-регулятора по углу отклонения маятника,
5. Моделирование системы с ПИД-регулятором,
6. Получение нелинейной модели и дополнение её системой регулирования.

На рисунке 0.1 показана схема тележки с перевёрнутым маятником.

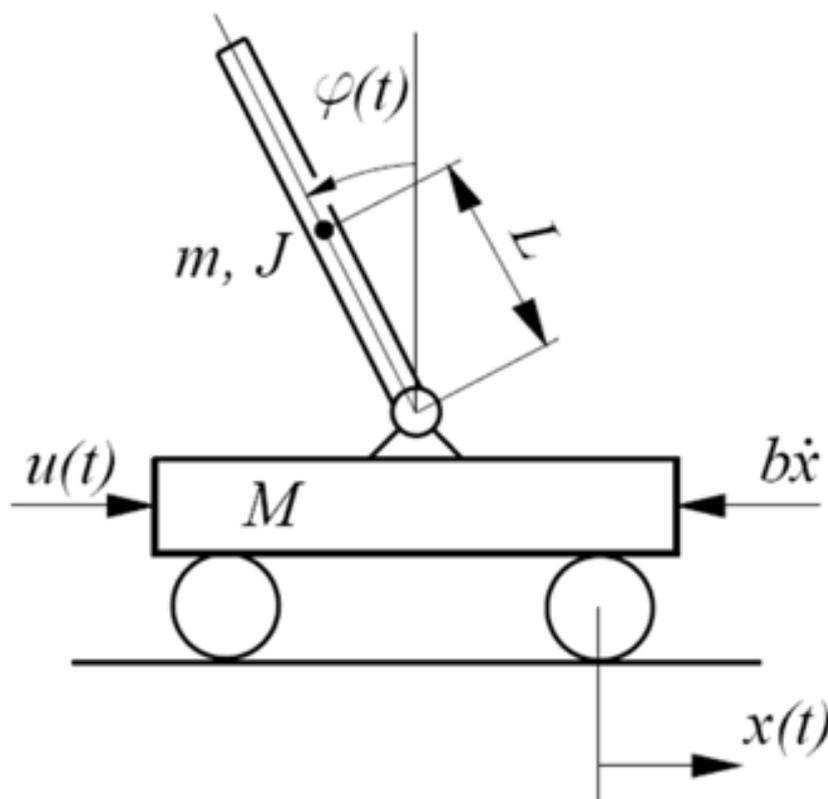


Рисунок 0.1 — Перевёрнутый маятник

# 1 Выполнение работы

## 1.1 Математическая модель

На рисунке 1.1 показаны силы, действующие на звенья системы.

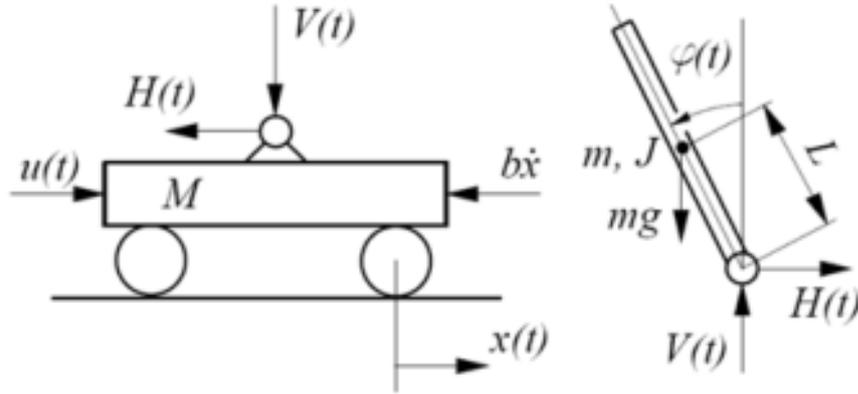


Рисунок 1.1 — Силы, действующие на звенья системы

Перевернутый маятник может быть описан математической моделью, состоящий из двух дифференциальных уравнений (трением пренебрегли):

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - mL\ddot{\varphi} \cos \varphi + mL\dot{\varphi}^2 \sin \varphi = u(t), \\ (J + mL^2)\ddot{\varphi} - mL\ddot{x} \cos \varphi - mgL \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Линеаризация около  $\varphi = 0$  (стержень направлен вертикально вверх) приведёт к системе

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - mL\ddot{\varphi} + mL\dot{\varphi}^2\varphi = u(t), \\ (J + mL^2)\ddot{\varphi} - mL\ddot{x} - mgL\varphi = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Передаточная функция системы

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{(mL/r)s}{s^3 + \frac{b(J+mL^2)}{r}s^2 - \frac{(m+M)mgL}{r}s - \frac{bmgL}{r}} \quad (1.3)$$

В переменных состояния система может быть представлена в виде матричного уравнения  $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + Bu(t)$ , уравнение выхода  $\vec{y} = C\vec{x} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$ .

## 1.2 Анализ передаточной функции

В MATLAB произведён анализ передаточной функции системы:

```
M=0.5 ; %масса тележки
m=0.2; %масса маятника
b= 0.1;
L =0.3 ;
J = 0.006;
r=(M+m)*(J+m*L^2)-m^2*L^2;
g=9.81;
Передаточная функция
num_p=[m*L/r 0];
den_p=[1 b*(J+m*L^2)/r -(M+m)*m*g*L/r -b*m*g*L/r];
sys_p=tf(num_p, den_p)
sys_p =
4.545 s
-----
s^3 + 0.1818 s^2 - 31.21 s - 4.459
Continuous-time transfer function.
pole(sys_p)
t=0:0.1:1;
impulse(sys_p,0:0.01:1)
```

Передаточная функция имеет три полюса 5.568,  $-5.6069$ ,  $-0.1428$  - система неустойчива из-за наличия положительного полюса.

Реакция системы на импульсное воздействие показана на рисунке 1.2. Из-за линеаризации график не физичен при больших отклонениях (угол поворота бесконечно растёт).

## 1.3 Использование метода пространства состояний

Проведён анализ модели в пространстве состояний:

```
p=J*(M+m)+M*m*L^2;
A = [0 1 0 0; 0 -b*(J+m*L^2)/p m^2*g*L^2/p 0; 0 0 0 1; 0 -(b*m*L)/p m*
```

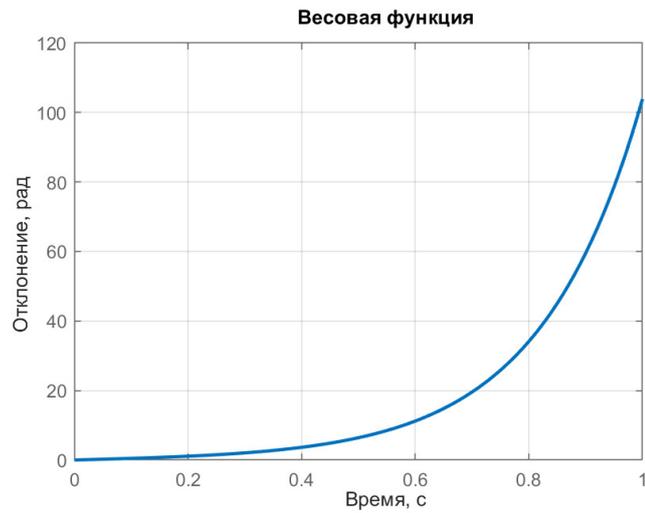


Рисунок 1.2 — Реакция на импульсное воздействие

```

B = [ 0; (J+m*L^2)/p; 0; m*L/p];
C = [1 0 0 0; 0 0 1 0];
D = [0; 0];
sysss_p=ss(A,B,C,D)

```

Отклик системы на импульсное воздействие показан на рисунке 1.3.

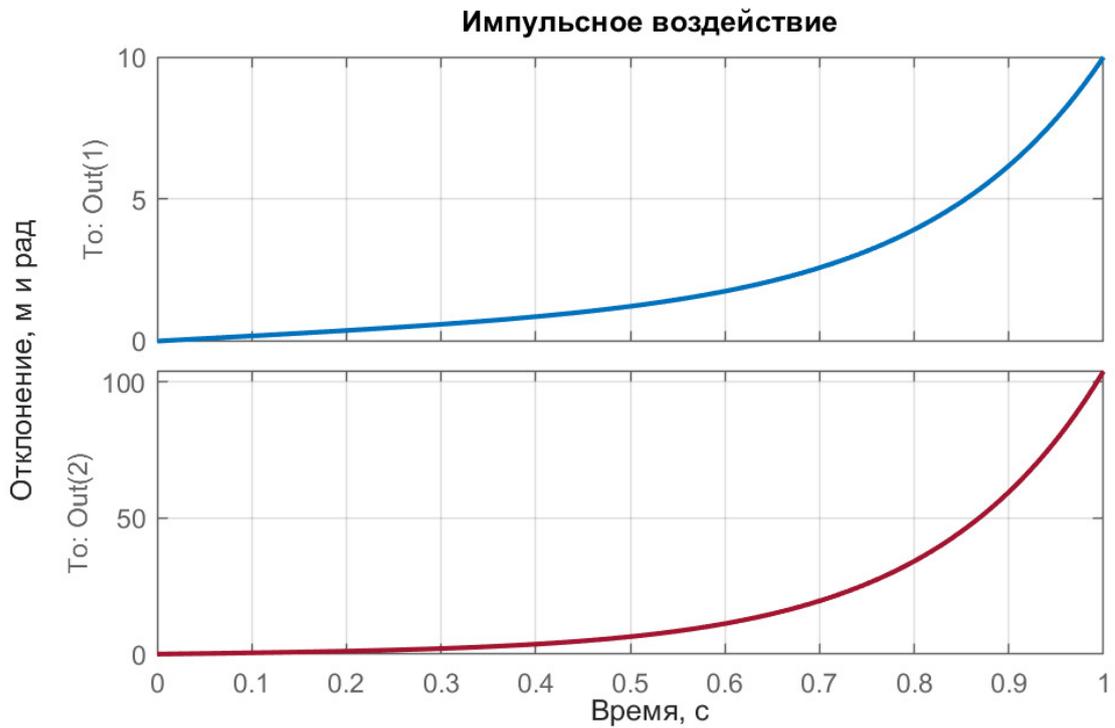


Рисунок 1.3 — Весовые функции (нижняя - угол стержня, верхняя - перемещение тележки)

Определена управляемость и наблюдаемость системы:

```
Y=ctrb(syss_p) %Матрица управляемости
n=sprank(Y) %Ранг матрицы управляемости
Ob= obsv(syss_p) %Матрица наблюдаемости
n=rank(Ob) %Ранг матрицы наблюдаемости
```

Получили, что ранг обеих матриц максимален - система наблюдаема и управляема.

Y = 4x4

0	1.8182	-0.3306	12.2213
1.8182	-0.3306	12.2213	-4.4332
0	4.5455	-0.8264	142.0304
4.5455	-0.8264	142.0304	-31.3515

n = 4

Ob = 8x4

1.0000	0	0	0
0	0	1.0000	0
0	1.0000	0	0
0	0	0	1.0000
0	-0.1818	2.6755	0
0	-0.4545	31.2136	0
0	0.0331	-0.4864	2.6755
0	0.0826	-1.2161	31.2136

n = 4

Рисунок 1.4 — Анализ управляемости и наблюдаемости

**Наблюдаемость при изменении матрицы C:**

```
% ПРОВЕРКА НАБЛЮДАЕМОСТИ ПРИ РАЗНЫХ ВЫХОДАХ
disp('--')
C = [1 0 0 0;
0 0 0 0]
```

```

ss(A,B,C,D);
obsv(ss(A,B,C,D))
if sprank(ans) == 4
disp('Наблюдаема')
else
disp('Ненаблюдаема')
end
disp('---')
%% ИТД ДЛЯ КАЖДОГО С

```

При изменении матрицы  $C$  наблюдаемость меняется: при наличии хотя бы в одном из выходов  $y_i$  компоненты  $x(t)$  система наблюдаема. В противном случае первый столбец матрицы наблюдаемости нулевой - ранг матрицы меньше её порядка и система ненаблюдаема.

Это связано с тем, что матрица наблюдаемости собирается из матриц  $C, A$  и матрица  $A$  имеет нулевой первый столбец.

#### 1.4 Синтез ПИД-регулятора

С помощью команды `pidtool` подобраны параметры ПИД-регулятора - см. рисунок 1.6. Достигнуто время регулирования 0,682 секунды при перерегулировании 38,7%.

```

Kp=34.9941;
Ki=75.0197;
Kd=4.0809;
pidsys=tf([Kd Kp Ki], [1 0])
pidsys =
4.081 s^2 + 34.99 s + 75.02
-----
s
Continuous-time transfer function.
pole(pidsys*sys_p/(1+pidsys*sys_p))
0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i

```

C = 2x4

0	1	0	0
0	0	1	1

ans = 8x4

0	1.0000	0	0
0	0	1.0000	1.0000
0	-0.1818	2.6755	0
0	-0.4545	31.2136	1.0000
0	0.0331	-0.4864	2.6755
0	-0.3719	29.9975	31.2136
0	-1.2221	83.5991	-0.4864
0	-14.1204	973.2961	29.9975

Ненаблюдаема

---

--

C = 2x4

0	1	0	1
0	0	1	0

ans = 8x4

10<sup>3</sup> x

0	0.0010	0	0.0010
0	0	0.0010	0
0	-0.0006	0.0339	0
0	0	0	0.0010
0	0.0001	-0.0017	0.0339
0	-0.0005	0.0312	0
0	-0.0154	1.0581	-0.0017
0	0.0001	-0.0012	0.0312

Ненаблюдаема

Рисунок 1.5 — Пример при ненаблюдаемой системе

	Tuned
Kp	34.9941
Ki	75.0197
Kd	4.0809
Tf	n/a
Performance and Robustness	
	Tuned
Rise time	0.0642 seconds
Settling time	0.682 seconds
Overshoot	38.7 %
Peak	1.41
Gain margin	-10.4 dB @ 4.13 rad/s
Phase margin	63.6 deg @ 17.9 rad/s
Closed-loop stability	Stable

Рисунок 1.6 — Подбор параметров ПИД-регулятора

```

5.5680 + 0.0000i
-8.0268 + 0.0000i
-5.3523 + 3.6442i
-5.3523 - 3.6442i
-5.6069 + 0.0000i
-0.1428 + 0.0000i
zero(pidsys*sys_p/(1+pidsys*sys_p))
0.0000 + 0.0000i
0.0000 + 0.0000i
5.5680 + 0.0000i
-5.6069 + 0.0000i
-4.2875 + 0.0083i
-4.2875 - 0.0083i
-0.1428 + 0.0000i

```

Видно, что передаточная функция системы с ПИД регулятором имеет положительный полюс, однако он сокращается с положительным нулём, благодаря чему система становится устойчивой.

Для наглядности использовался блок S-function, рисующий анимацию тележки со стержнем во время симуляции. Поведение системы с ПИД-регулятором показано на 1.9.

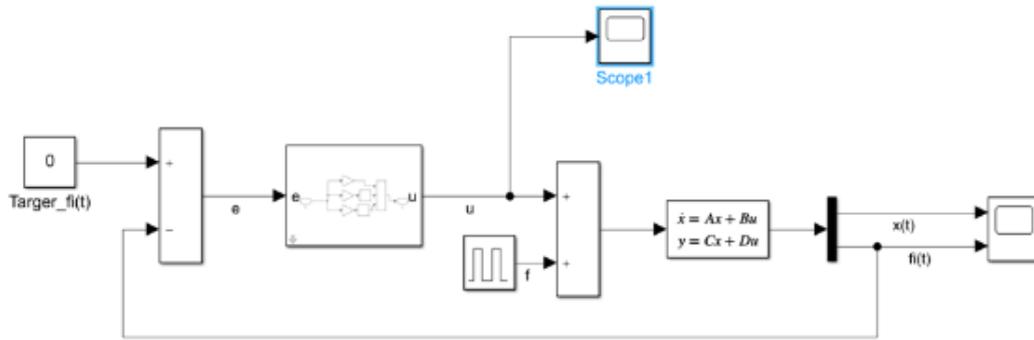


Рисунок 1.7 — Simulink линейризованной модели

Далее был добавлена обратная связь с ПИД-регулятором на положение тележки (см. рисунок 1.10). Полученный отклик при установке  $x = 1$  показан на рисунке 1.11. Коэффициенты регулятора положения  $x$ :  $K_p = 5, K_i = 0.03, K_d = 0.5$ . Полученное время регулирования менее 5 секунд.

Второй регулятор имеет значительно меньшие коэффициенты, чтобы действие от регулирования положения  $x$  не мешало выполнять основную задачу по поддержанию стержня в вертикальном положении.

### 1.5 Нелинейная модель

Вместо представления в виде пространства состояний составлена подсистема Simulink по нелинейным уравнениям для того, чтобы сравнить поведение системы при учёте нелинейностей. Блок "State-space" заменён подсистемой на рисунке 1.12.

Поведение системы при тех же установках, что и в предыдущем опыте, показано на рисунке 1.14. Составляющая управляющего воздействия,

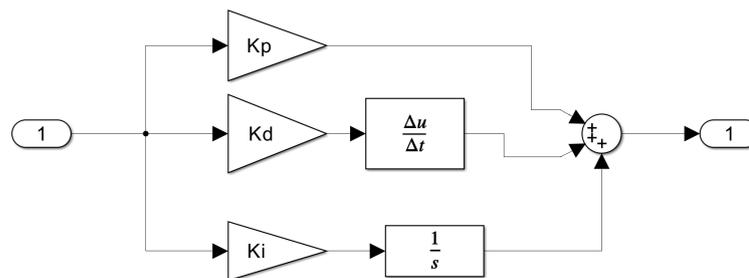


Рисунок 1.8 — Блок ПИД-регулятора

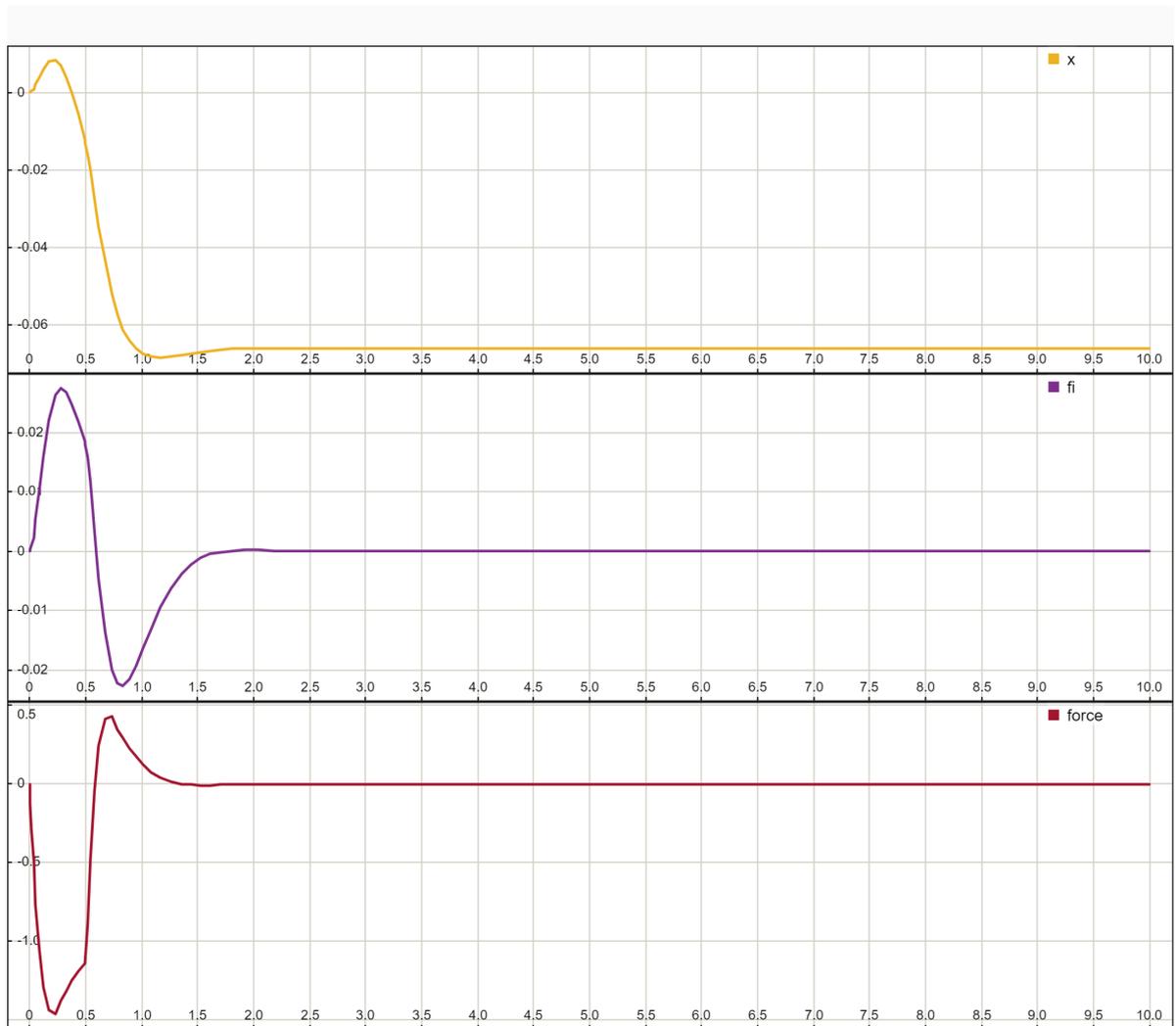


Рисунок 1.9 — Реакция системы с ПИД-регулятором на импульсное воздействие (сверху-вниз:  $x, \varphi$ , сила)

отвечающая за перемещение тележки по  $x$ , уменьшает воздействие, создаваемое регулятором, отвечающим за обратную связь по  $\varphi$ .

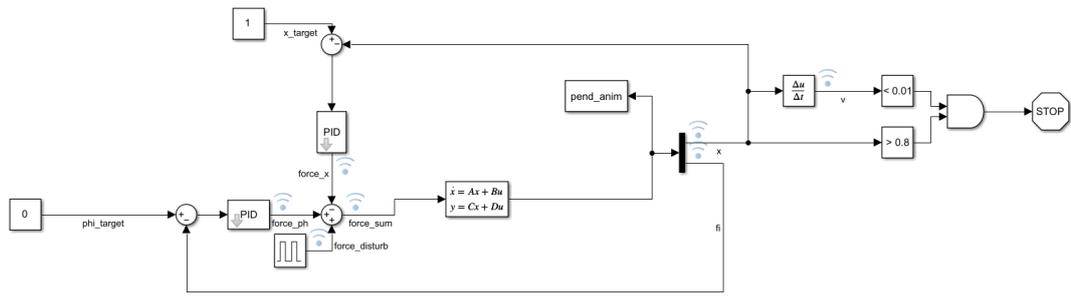


Рисунок 1.10 — Модель с дополнительным ПИД-регулятором для контроля положения  $x$  тележки.

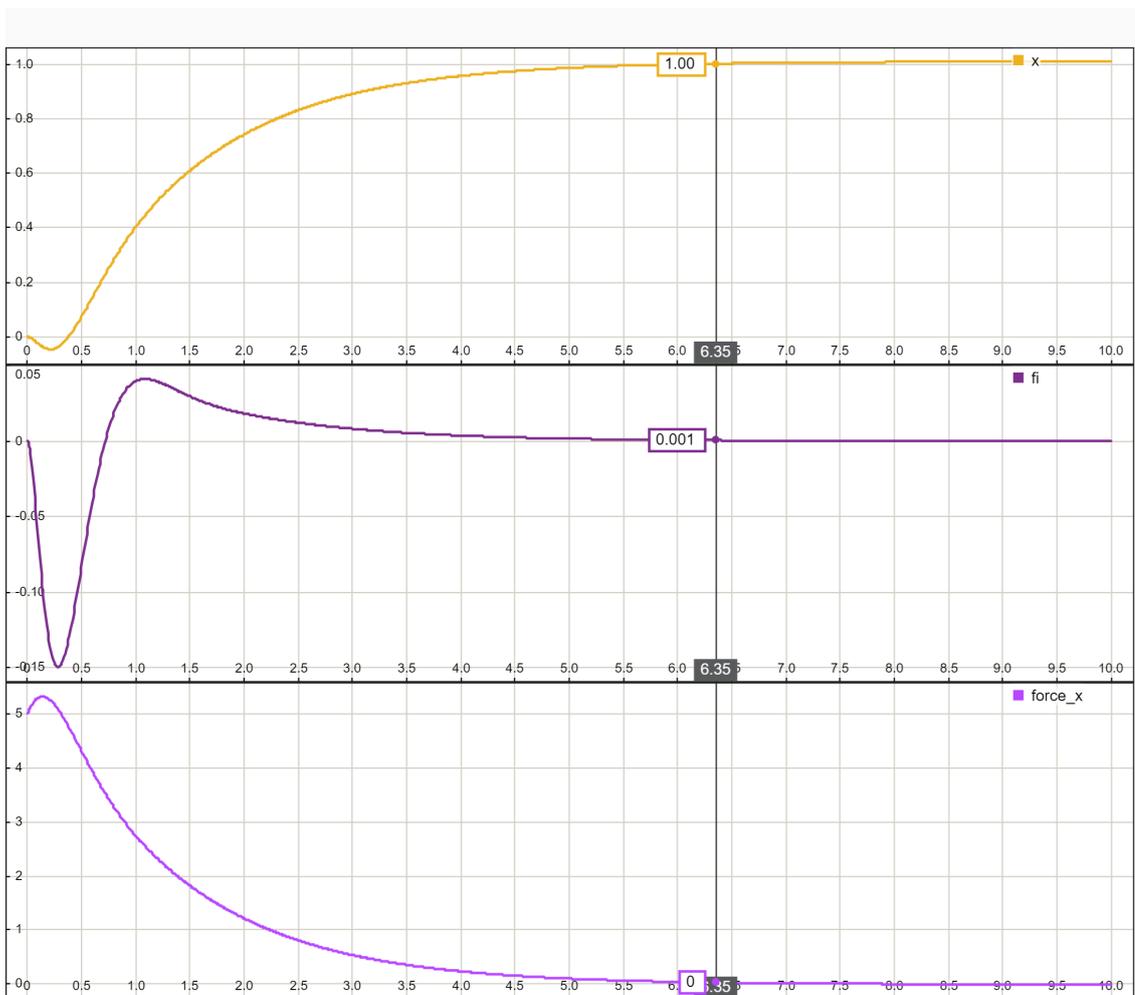


Рисунок 1.11 — Система с двумя ПИД-регуляторами

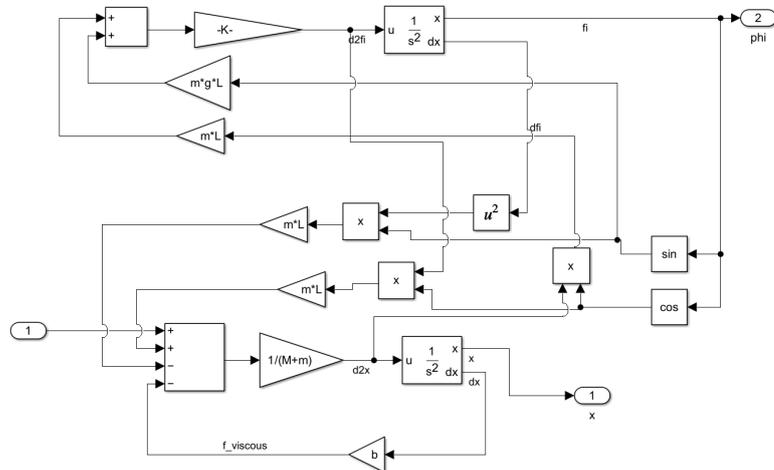


Рисунок 1.12 — Подсистема маятника (нелинейная модель)

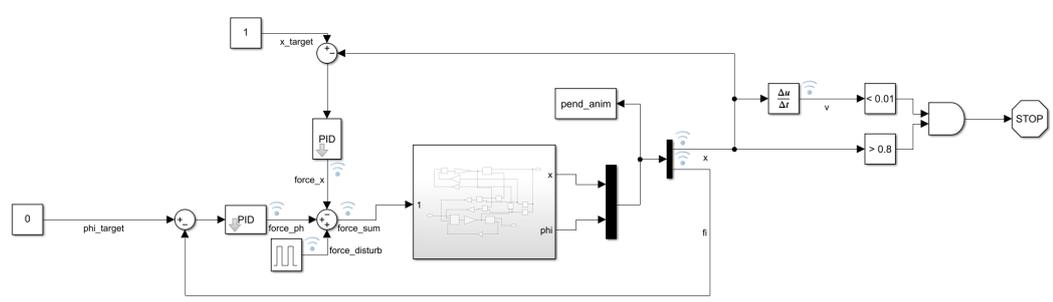


Рисунок 1.13 — Simulink нелинейной модели

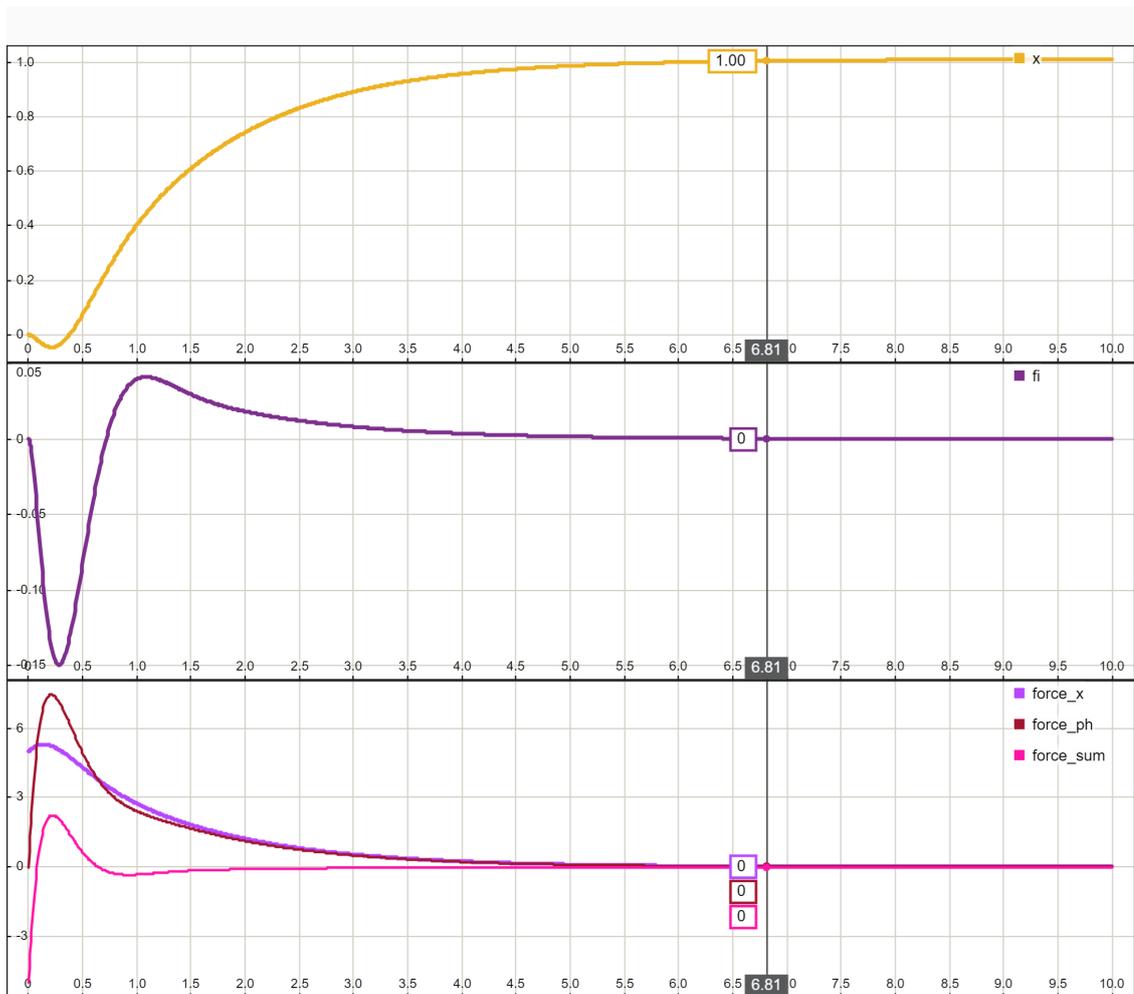


Рисунок 1.14 — Поведение нелинейной системы

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В лабораторной работе разработана математическая модель системы тележки с маятником в нелинейном и линеаризованном виде, проведен синтез ПИД-регуляторов для поддержания требуемого положения стержня и тележки.

В результате получены графики весовой функции системы, а также показана правомерность перехода к линеаризованной модели (графики практически идентичны по сравнению с нелинейной моделью), что является очередным подтверждением теоремы Ляпунова об устойчивости.

При моделировании больших отклонений маятника линейную модель применять нельзя (рисунок 1.2).